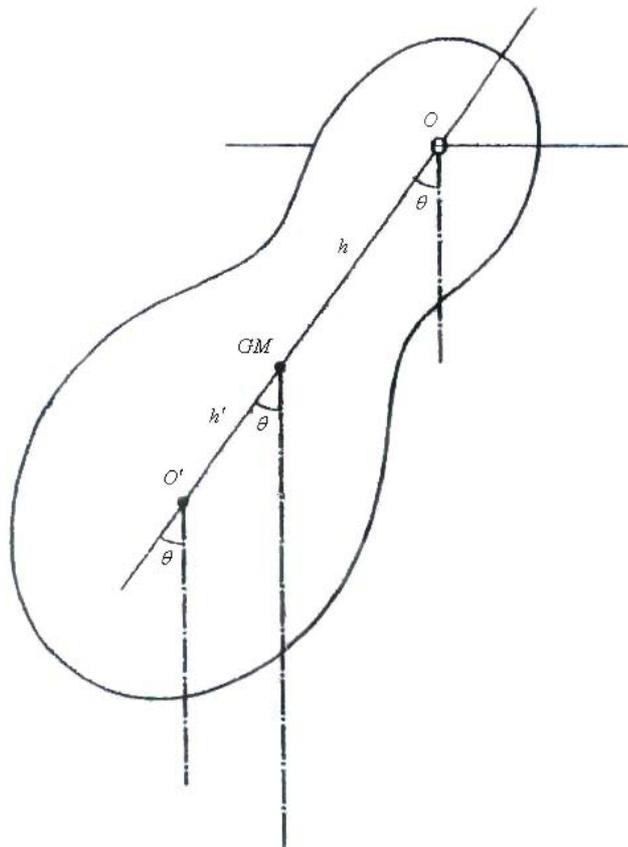


## آزمایش ۵: آونگ کاتر

هدف: آشنایی با آونگ کاتر و تعیین شتاب ثقل زمین با اندازه‌گیری دوره‌ی تناوب نوسانات آونگ کاتر.

در این آزمایش می‌خواهیم با اندازه‌گیری دوره‌ی نوسانات یک آونگ مرکب به نام آونگ کاتر شتاب ثقل زمین را به دست آوریم. هر جسمی که بتواند حول یک محور ثابت افقی تحت اثر نیروی جاذبه‌ی زمین نوسان کند، آونگ مرکب نامیده می‌شود.



در شکل فوق مراکز  $O$ ،  $GM$  و  $O'$  در یک صفحه قرار دارند. بر این اساس و مطابق شکل خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \tau = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \tau = -Mgh \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgh}{I} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

به ازای  $\theta < 6^\circ$  می‌توان  $\sin \theta \cong \theta$  قرار داد. که در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgh}{I} \theta = 0 \quad , \quad \omega^2 = \frac{Mgh}{I} \quad (2)$$

بنابراین دوره‌ی تناوب نوسانات آونگ مرکب به صورت زیر خواهد بود:

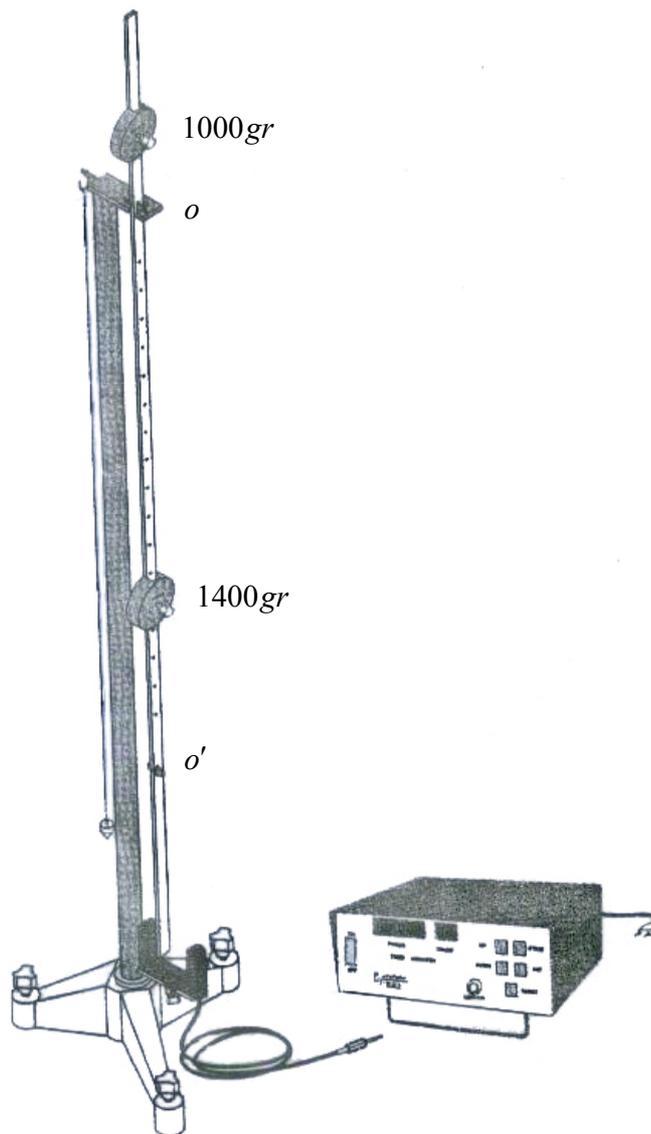
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad (3)$$

با قرار دادن  $I = Ml^2$  و  $h = l$  دوره‌ی تناوب نوسانات آونگ ساده که حالت خاصی از یک آونگ مرکب است، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4)$$

که در آن  $l$  طول آونگ ساده است.

هویگنس نشان داد که در صفحه‌ای که از محور نوسان  $O$  و مرکز گرانش ( $GM$ ) می‌گذرد، محور دیگری ( $O'$ ) به موازات محور نوسانی که از  $O$  عبور می‌کند وجود دارد که دوره‌ی تناوب آونگ مرکب حول این محور با دوره‌ی تناوب آونگ مرکب حول محور  $O$  برابر است. کاتر در سال ۱۸۱۸ بر اساس نظر هویگنس یک آونگ مرکب تولید کرد. همان‌طور که در شکل صفحه‌ی بعد دیده می‌شود، این آونگ از یک میله و دو جرم متفاوت ۱۰۰۰ و ۱۴۰۰ گرمی تشکیل می‌شود. این مجموعه را می‌توان حول دو تیغی فلزی ثابت بر روی میله (همان مرکزهای  $O$  و  $O'$ ) به نوسان در آورد. در این آونگ که به آونگ کاتر معروف است، مرکزهای  $O$  و  $O'$  ثابت در نظر گرفته می‌شوند و یکی از دو جرم متفاوت (۱۰۰۰ گرمی) در یک مکان ثابتی قرار دارد و جرم دیگر می‌تواند جابجا شود. که در این صورت مرکز جرم جابجا شده و دوره‌ی تناوب حول مرکزهای  $O$  و  $O'$  تغییر می‌کند.



با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی و رابطه‌ی (۳) می‌توان نشان داد که وقتی دوره‌ی تناوب حول این دو مرکز با هم برابر باشد، این دوره تناوب مشترک معادل دوره‌ی تناوب آونگ ساده‌ای به طول  $l = h + h'$  خواهد بود. بر اساس قضیه‌ی محورهای موازی اگر لختی دورانی حول محور گذرنده از مرکز جرم جسمی به جرم  $M$  را بدانیم، در این صورت لختی دورانی حول هر محور دیگری که به موازات محور گذرنده از مرکز جرم و به فاصله‌ی  $h$  از آن قرار داشته باشد، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$I_o = I_{GM} + Mh^2 \quad (5)$$

اگر آونگ ساده‌ای به طول  $l = h + h'$  دارای دوره‌ی تناوب  $T_o = T_o'$  باشد، با استفاده از رابطه‌ی (۴) می‌توان شتاب  $g$  را به دست آورد. در این بررسی دانستن نقطه‌ی گرانیگاه دارای اهمیت نیست.

هرچند می‌توان شتاب ثقل زمین را با اندازه‌گیری دوره‌ی تناوب یک آونگ ساده نیز به دست آورد، ولی در عمل و به ویژه در زمین شناسی برای تعیین دقیق آن از آونگ کاتر استفاده می‌شود.

وقتی دوره‌ی تناوب حول مرکزهای  $o$  و  $o'$  یکسان باشد، اگر یکی از نقاط مرکز نوسان باشد، مرکز دیگر مرکز ضربه خواهد بود. بدین معنا که اگر نیرویی به مرکز ضربه وارد شود، این نیرو هیچ تأثیری در نقطه‌ی دیگر که مرکز نوسان است، نخواهد داشت. از این خاصیت برای تعیین محل ضربه‌گیر در استفاده می‌شود.

روش انجام آزمایش:

- ۱- آونگ کاتر را روی یکی از تیغه‌ها سوار کنید.
- ۲- وزنه‌ها را با استفاده از مهره‌ی روی آنها روی میله محکم کنید. برای این کار وزنه‌ی ۱۰۰۰ گرمی را در فاصله‌ی ۷ تا ۱۲ سانتی‌متری بالای تیغه‌ی فوقانی (مرکز  $o$ ) و وزنه‌ی ۱۴۰۰ گرمی را بالای تیغه‌ی تحتانی (مرکز  $o'$ ) قرار دهید.
- ۳- با داشتن فواصل مشخص ۵ سانتی‌متری می‌توانید وزنه‌ی ۱۴۰۰ گرمی را در فواصل مختلف ( $y$ ) از مرکز  $o'$  قرار دهید.
- ۴- با استفاده از شاقول دستگاه را در حالت تراز قرار دهید.
- ۵- با قرار دادن وزنه‌ی ۱۴۰۰ گرمی در فواصل ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵ و ۴۰ سانتی‌متری از مرکز  $o'$  ابتدا دوره‌ی تناوب حول مرکز  $o$  را به دست آورید. سپس به ازای همان حالت‌ها و با عوض کردن جای دو تیغه، دوره‌ی تناوب حول مرکز  $o'$  را اندازه‌گیری کنید.

۶- برای اندازه‌گیری دوره‌ی تناوب آونگ کاتر همان‌طور که در شکل نیز دیده می‌شود از سنسور و دستگاه شمارنده استفاده می‌شود. با تنظیم دستگاه، مدت زمان ۲۰ نوسان را اندازه‌گیری کنید و از روی آن دوره‌ی تناوب را در هر حالت به دست آورید.

$y(cm)$	$t(s)$ مدت زمان ۲۰ نوسان حول مرکز $O$	$T(s)$ دوره تناوب	$y'(cm)$	$t'(s)$ مدت زمان ۲۰ نوسان حول مرکز $O'$	$T'(s)$ دوره تناوب
10			10		
15			15		
20			20		
25			25		
30			30		
35			35		
40			40		

۷- با رسم نمودار دوره‌ی تناوب برحسب  $y$  برای مرکزهای  $O$  و  $O'$  در یک نمودار، محل تلاقی  $T$  و  $T'$  را به دست آورید.

۸- با اندازه‌گیری فاصله‌ی بین مرکزهای  $O$  و  $O'$  و با داشتن دوره‌ی تناوب مشترک برای دو مرکز، طبق رابطه‌ی (۴) پارامتر  $g$  را به دست آورید.

۹- درصد اختلاف  $g$  به دست آمده را با مقدار واقعی آن  $9.8m/s^2$  تعیین کنید.

$T(s)$ دوره تناوب مشترک	$l(m)$ یا فاصله‌ی بین $O$ تا $O'$	$g(m/s^2)$ شتاب جاذبه زمین	درصد اختلاف (%) نسبت به $9.8(m/s^2)$

## سؤالات

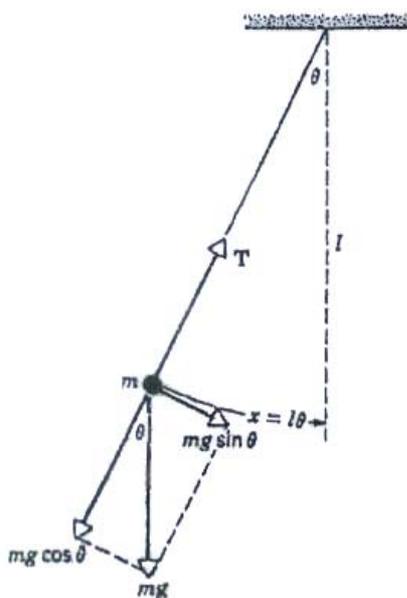
- ۱- خطاهای ابزاری در این آزمایش چیست؟
- ۲- خطای آزمایش کننده در این آزمایش چه مواردی می‌تواند باشد؟
- ۳- با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی و رابطه‌ی (۳) نشان دهید که وقتی دوره‌ی تناوب حول مرکزهای  $O$  و  $O'$  با هم برابر باشد، این دوره تناوب مشترک معادل دوره‌ی تناوب آونگ ساده‌ای به طول  $l = h + h'$  است؟
- ۴- اگر یک دیسک به جرم  $M$  و شعاع  $R$  حول محور عبوری از مرکز  $O$  که روی محیط دیسک و عمود بر آن قرار دارد، حرکت نوسانی انجام دهد، طول آونگ ساده‌ی همزمان با آن چقدر است؟
- ۵- اگر میله‌ای به جرم  $M$  و طول  $b$  از یک سر آن به عنوان مرکز نوسان آویزان شود، مرکز ضربه در چه فاصله‌ای از مرکز نوسان قرار می‌گیرد؟

## آزمایش ۶: آونگ ساده

هدف: بررسی حرکت نوسانی آونگ ساده و محاسبه‌ی شتاب جاذبه‌ی زمین با اندازه‌گیری دوره‌ی تناوب نوسانات آن.

آونگ ساده شامل جرم متمرکز در یک نقطه است که توسط نخ بدون جرمی آویخته شده و به واسطه‌ی نیروی جاذبه‌ی زمین قابلیت نوسان دارد. در آونگ ساده لازم است وزن گلوله به گونه‌ای انتخاب شود، که بتوان از جرم نخ در برابر آن صرف نظر نمود. اگر گلوله‌ای به جرم  $m$ ، آویخته به ریسمانی به طول  $l$  را به اندازه‌ی زاویه‌ی  $\theta$  از موضع تعادل کشیده و سپس رها کنیم، در اطراف موضع تعادل خود حرکت نوسانی خواهد داشت. در این صورت همان‌طور که در آزمایش قبل نشان داده شد، دوره‌ی تناوب نوسانات آونگ ساده به ازای مقادیر  $\theta < 6^\circ$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$



از طرف دیگر می‌توان معادلات حاکم بر حرکت گلوله را با توجه به قوانین حرکت نیوتون به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} T - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{l} \\ F = -mg \sin \theta = ma \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $T$  نیروی کشش ریسمان و  $F$  نیروی بازگرداننده است. به ازای مقادیر  $\theta < 6^\circ$  حرکت نوسانی خواهیم داشت و در این صورت:

$$\sin \theta \approx \theta \approx \frac{x}{l} \quad (3)$$

$$-mg\theta = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

بنابراین طبق رابطه‌ی فوق نیز می‌توان به رابطه‌ی (۱) رسید. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، زمان تناوب نوسانات آونگ ساده به جرم و جنس گلوله، همچنین به زاویه‌ی نوسان آونگ بستگی ندارد. اما اگر دامنه‌ی نوسان کوچک نباشد، می‌توان نشان داد که در این صورت زمان تناوب نوسانات آونگ ساده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right)} \quad (4)$$

که در آن  $\theta_0$  زاویه‌ی انحراف اولیه‌ی آونگ است.

روش انجام آزمایش:

۱- سیستم را مطابق شکل سوار کنید.

۲- گلوله‌ی فلزی را به قطعه‌ی ریسمانی تقریباً به طول

یک متر متصل کرده و آن را به گیره و پایه بیاویزید.

۳- با انتخاب طول آونگ (طول ریسمان + شعاع گلوله‌ی

فلزی) به اندازه‌ی ۴۰، ۵۰ و ۶۰ سانتی‌متر، میانگین

دوره‌ی تناوب آونگ ساده را اندازه‌گیری کنید. یعنی

به ازای هر طول سه بار زمان را اندازه‌گیری کرده و

میانگین بگیرید. برای ایجاد حرکت نوسانی، گلوله را

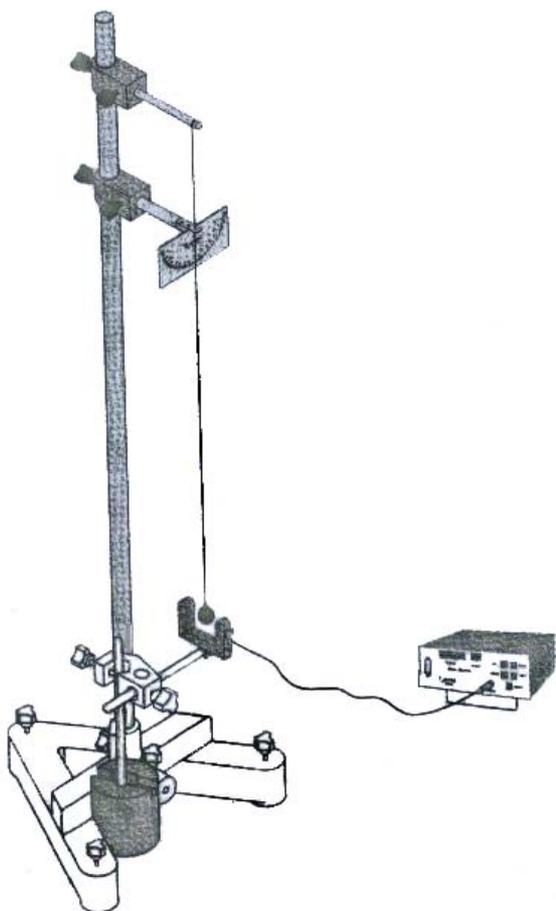
به ازای زاویه‌ی کمتر از ۶ درجه منحرف کنید.

۴- با توجه به مقادیر معلوم  $l$  و  $T$ ، طبق رابطه‌ی (۱)،  $g$

هر حالت را به دست آورید و بعد میانگین  $g$  همه‌ی

حالت‌ها را محاسبه کنید.

۵- درصد اختلاف  $\bar{g}$  به دست آمده را با مقدار واقعی آن  $9.8m/s^2$  تعیین کنید.



$l(m)$ طول آونگ	$\bar{T}(s)$ میانگین دوره تناوب	$g(m/s^2)$ شتاب جاذبه زمین	$\bar{g}(m/s^2)$	درصد اختلاف (%) نسبت به $9.8(m/s^2)$
0.4				
0.5				
0.6				

۶- نمودار  $4\pi^2 l$  بر حسب  $T^2$  را رسم کرده و از روی شیب نمودار  $g$  را همراه با خطای شیب به روش مطرح شده در ابتدای دستور کار به دست آورید.